



TITLE:

# Abelian l-adic representations associated with Selberg integrals II(Research on Complex Analytic Geometry and Related Topics)

AUTHOR(S):

織田, 孝幸

---

CITATION:

織田, 孝幸. Abelian l-adic representations associated with Selberg integrals II(Research on Complex Analytic Geometry and Related Topics). 数理解析研究所講究録 1989, 693: 119-137

ISSUE DATE:

1989-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101357>

RIGHT:

# Abelian $\ell$ -adic representations associated with Selberg integrals II.

東京大学理学部 織田 孝幸  
(Takayuki ODA)

§0.A Euler の積分, あるいは Beta 関数

$$\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0)$$

は次のような有限体上の類似物をもつ。

$p$  を素数とし,  $q = p^f$  ( $f$  は自然数) とし,  $\mathbb{F}_q$  を  $q$  個の元からなる有限体,  $\chi_1, \chi_2: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を  $\mathbb{F}_q$  から  $\mathbb{C}^\times$  への乗法的指標とするとき,

$$J(\chi_1, \chi_2) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q} \chi_1(m) \chi_2(1-m) \quad (\text{但し, } \chi_i(0)=0)$$

は Jacobi の和と呼ばれる。これは Gauss の和

$$G(\chi; \psi) = - \sum_{m \in \mathbb{F}_q} \chi(m) \psi(m)$$

( $\psi: \mathbb{F}_q \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}^\times$  は  $\mathbb{F}_q$  の nontrivial additive character)

によつて

$$(-1) J(\chi_1, \chi_2) = \frac{G(\chi_1; \psi) G(\chi_2; \psi)}{G(\chi_1 \chi_2; \psi)} \quad (\text{但し, } \chi_1 \neq 1, \chi_2 \neq 1)$$

と表わされる。

この和は  $q \equiv 1 \pmod{n}$  のとき, 有限体  $\mathbb{F}_q$  上の Fermat 曲線

$$X^n + Y^n = 1$$

の合同 zeta 関数の根として現われ, 円分体  $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$  上の Fermat 曲線  $X^n + Y^n = 1$  の abelian  $L$ -遊表現に対応する Hecke 指標 ( $A^0$  型の量指標) に対応することはよく知られている。  
(cf. [W-1], [W-2], [D-1].)

さて, Selberg は 1944 年に, 上のような積分の類似物として次のような積分公式を示した。

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 (u_1 u_2 \cdots u_N)^{\alpha-1} \{(1-u_1)(1-u_2) \cdots (1-u_N)\}^{\beta-1} |\Delta(u)|^{2\delta} du_1 \cdots du_N \\ = \prod_{\nu=1}^N \frac{\Gamma(\nu\delta+1) \Gamma(\alpha+(\nu-1)\delta) \Gamma(\beta+(\nu-1)\delta)}{\Gamma(\delta+1) \Gamma(\alpha+\beta+(N+\nu-2)\delta)}$$

(cf. [S-1])

この積分は Tsuchiya-Kanie [T-K] の conformal field theory における役割を果たす。また Aomoto [A-1] は de Rham cohomology の context でこういう積分の現われる理由とさげている。

さて, 1980 年ごろ Evans [E-1] はこの積分の有限体上の類似物を定義し, それを Gauss の和で書き表わす, 上の [ ] に積分の表示の類似の式を予想し,  $N=2$  のときに初等的に証明した。以下この予想を簡単に説明しよう。

§0.B. Selberg の和と Evans の予想.

$N$  を自然数とする。  $N$  変元 の Selberg 和は次のように定義さ

れる。  $p$  を奇素数とし,  $q = p^f$ ,  $\mathbb{F}_q$  を  $q$  個の元からなる有限体とする。  $\phi: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  で  $\mathbb{F}_q$  の乗法的な指標で位数 2 の唯一の指標を表わす。  $\phi$  が  $q$  に依存していることを特に示すとき  $\phi = \phi_q$  と書く。

定義 (0.1)  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  を  $\mathbb{F}_q^\times$  の指標とし,  $\chi_i(0) = 0$  とおく。

( $i = 0, 1, \text{ or } 2$ )。 このとき,  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  に対する  $N$  次元の Selberg 和を

$$S_q^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \phi) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ N = \deg F, F \text{ is monic}}} \chi_1((-1)^N F(0)) \chi_2(F(1)) \chi_3(\phi(D_F))$$

で定義する。

但し, ここで  $F$  は次数  $N$  の  $\mathbb{F}_q$  係数のモノニックな多項式を動かす。 $D_F$  は  $F$  の判別式とする。  $N=1$  のとき  $D_F = 1$  と定義する。  $N=1$  のときは明らかに Jacobi 和と一致する。

上の形では Selberg 積分との類似が見にくいのので少し説明する。

$$F(T) = \prod_{i=1}^N (T - \mu_i) \quad (\mu_i \in \overline{\mathbb{F}_q}) \text{ とする。 すると}$$

$$(-1)^N F(0) = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N, \quad F(1) = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \cdots (1 - \mu_N).$$

$$D_F = \prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j)^2,$$

となり Selberg 積分と同じ形であるのがわかる。

Evens は論文 [E-1] で上の和を定義し次の予想をした。

予想 (0-2)  $\chi_1 \chi_2 \chi_3^{n-1+j} \neq 1$  かつ  $0 \leq j \leq N-1$  とする  $j$  が 1 つある。

ついで成立すれば,

$$(-1)^N S_q^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{G(\chi_3^{j+1}, \psi) G(\chi_1 \chi_3^j, \psi) G(\chi_2 \chi_3^j, \psi)}{G(\chi_3, \psi) G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^{N-1+j}, \psi)}$$

が成立する。

[E-1] では上の予想は  $N=2$  のとき初等的な方法で示されたが  $N \geq 3$  では、特別な場合しか示されていないようである。(cf. [E-2]).

上の予想が正しいければその系として次のようになる。

予想 (0-3) (0.2) と同じ仮定のもとで,

$$(i) \quad |S_q^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)| = q^{\frac{N}{2}}$$

(ii)  $m$  を自然数とし,  $\chi_i^{(m)} = \chi_i \circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}$  とする。ただし, ここで  $N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q} : \mathbb{F}_{q^m}^\times \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$  はノルム写像。このとき

$$(-1)^N S_{q^m}(\chi_1^{(m)}, \chi_2^{(m)}, \chi_3^{(m)} \phi_m) = \{(-1)^N S_q(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)\}^{(m)}.$$

この 1-1 の目的は予想 (0-3) を示すことにある。すなわち

定理 (0-4)  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  についてもう少し強い仮定のもとで予想 (0-3) は成立する。

証明の方針は田分体上定義された  $N$  次元代数多様体の  $N$  次元 étale cohomology group に  $-1$  次元の部分空間を構成し、そうして得られる abelian  $l$ -adic 表現の  $p$  に於ける Frobenius element の像が丁度求める  $(-1)^N S_g^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)$  になることを示す。すると (i) は Deligne の (Weil 予想に関する) 定理から、(ii) は  $l$  進表現が  $-1$  次元であることがわかる。

注意. 予想が正しいければ、 $(-1)^N S_g^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)$  は  $\chi_i$  が global なものであるとき、Jacobi の  $\theta$  のときと同様に  $A_0$  型の量指標に対応していることがわかる。

$N=2$  のときは既に [0-1] に結果をまとめて発表した。

以下  $N$  次元射影空間  $\mathbb{P}^N$  のある Kummer covering を考え、その étale cohomology group のある subspace と  $-1$  次元の  $l$  進表現をつくる。途中から de Rham 版である Toudiya-Kanie の構成 (Selberg 積分の場合) と全く同様の議論になる。

# §1. Kummer 拡大体

$n$  を自然数とする。  $k$  を標数  $\neq n$  と素な体で  $-1$  の原始  $n$  乗根  $\zeta_n$  を含むものとする。  $u_1, \dots, u_N$  を  $k$  上独立な  $N$  個の変数と

し、 $\mathbb{K}$  上の有理関数体  $K_1 = \mathbb{K}(u_1, u_2, \dots, u_N)$  を考える。体  $K_1$  のアーベル拡大  $K_N$  を

$$K_N = K_1(\sqrt[n]{\alpha_i}, \sqrt[n]{1-u_i}, \sqrt[n]{u_i-u_j} \quad (1 \leq i, j \leq N))$$

で定める。 $K_N/K_1$  は Kummer 拡大でその Galois 群  $\text{Gal}(K_N/K_1)$  を  $A$  と書くと、 $A$  は  $\mu_n^{\oplus \frac{1}{2}N(N+1)}$  に同型である。但し  $\mu_n$  は  $\mathbb{K}$  の中の 1 の  $n$  中根のなす群とする。

さて  $K_1$  の  $\mathbb{K}$  上の model として、 $N$  次元射影空間  $\mathbb{P}^N$  をとる。そして  $K_N$  の model として、 $\mathbb{P}^N$  の  $K_N$  に於ける正規閉包をとる。すると  $Y'_n \rightarrow \mathbb{P}^N$  という拡大  $K_N/K_1$  に対する finite flat morphism を得る。 $Y'_n$  は normal であるが、smooth でないの、少し具合が悪い。そこで、2 次元でやるときのように、 $\mathbb{P}^N$  を blow-up して  $\hat{\mathbb{P}}^N$  を定義し、その正規閉包  $Y_n$  で、 $Y_n$  は smooth で  $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  が finite flat となるものを次の節で考える。

## §2. Terada model.

Appell の超幾何関数の monodromy の問題と関連して、Terada [T-1] は  $\mathbb{P}^N$  の blow up を構成した。この構成の特別な場合を以下に復習しよう。§2 の結果はすべて [T-1] にある。

まず  $N+2$  個の数字からなる集合  $N = \{0, 1, 2, \dots, N, N+1\}$  を考える。 $N$  の中集合  $\mathcal{P}(N)$  の部分集合  $\mathcal{I}$  を

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \subset N, \#I \geq 2\}$$

で定める。凡の各元  $I$  に対し  $\#I-2$  次の射影空間  $\mathbb{P}_I$  を次のように定義する。 ( $\#I=2$  のとき  $\mathbb{P}_I$  は点である。)

いま  $\#I$  次の affine 空間  $A^I$  を考え、その点の座標を  $(x_{I,i})_{i \in I}$  と書く。このとき  $A^I$  の 2 点に同値関係を

$$(x_{I,i})_{i \in I} \sim (y_{I,i})_{i \in I} \iff \begin{cases} \exists a \in k^\times, \exists b \in k, \text{ s.t.} \\ y_{I,i} = a x_{I,i} + b \quad (\forall i \in I) \end{cases}$$


で定める。 $A^I$  から対角集合  $\Delta(A_I)$  を除いた残りを上の同値関係で割って quotient をつくれば、それは  $(\#I-2)$  次の射影空間  $\mathbb{P}_I$  となる。座標  $(x_{I,i})_{i \in I}$  を  $\mathbb{P}_I$  の homogeneous coordinates with displacement という。

記法.  $x_I(i,j) = x_{I,i} - x_{I,j} \quad (i,j \in I, i \neq j)$  と定める。

さて  $\mathbb{P}_I$  たちの積  $\prod_{I \in \pi} \mathbb{P}_I \ni ((x_{I,i})_{i \in I})_{I \in \pi}$  に関する関係式で閉部分多様体  $\hat{\mathbb{P}}^N$  を定める。

$$\hat{\mathbb{P}}^N = \left\{ \hat{x} = ((x_{I,i})_{i \in I})_{I \in \pi} \mid \begin{array}{l} x_I(i,k) x_J(j,k) = x_I(j,k) x_J(i,k) \\ \forall I \subset J \in \pi, \forall i,j,k \in I \end{array} \right\}$$

命題 (2.1).  $\hat{\mathbb{P}}^N$  は  $N$  次の smooth scheme over  $\mathbb{Z}$ .

例.  $N=2$  のとき  $\hat{\mathbb{P}}^N$  は  $\mathbb{P}^2$  の line configuration  の 4 つの 3 重点での blow-up に外ならない。



各  $I \in \pi - \{N\}$  に対して  $\hat{\mathbb{P}}^N$  の閉部分 scheme を

$$\mathcal{D}_I = \bigcap_{I \neq J \in \pi} \bigcap_{i,j \in I} \{ \hat{x} \in \hat{\mathbb{P}}^N \mid \chi_J(i,j) = 0 \}$$

で定める。

命題 (2.2) 各  $\mathcal{D}_I$  は  $\hat{\mathbb{P}}^N$  の irreducible smooth divisor.

$\hat{x} \in \hat{\mathbb{P}}^N$  に対して,  $\mathcal{L}_{\hat{x}}$  を

$$\mathcal{L}_{\hat{x}} = \{ I \in \pi \mid \hat{x} \in \mathcal{D}_I \}$$

とおくと,  $\mathcal{L}_{\hat{x}}$  は次の (AR) 条件を満たす。

Lemma (AR) 条件.  $I, J \in \mathcal{L}_{\hat{x}}$  ならば,  $I \cap J = \emptyset$ , 又は  $I \subset J$ , 又は  $J \subset I$ .

さて次を成立させる。

命題 (2.3). (i)  $\mathcal{D}_{I_1} \cap \mathcal{D}_{I_2} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{I_k} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{L} = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$  が (AR) 条件を満たす。

(ii)  $\hat{\mathcal{D}} = \bigcup_{I \in \pi - \{N\}} \mathcal{D}_I$  は  $\hat{\mathbb{P}}^N$  の divisor with normal crossing.

以上より,  $\hat{\mathbb{P}}^N$  の stratification を次のように定める。

① stratification of  $\hat{\mathbb{P}}^N$ .

記号  $\pi$  の中集合  $\mathcal{P}(\pi)$  の集合集合  $\Sigma$  を

$$\Sigma = \{ \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subset \pi, \mathcal{L} \text{ は (AR) 条件を満たす} \}$$

で定める。

定義. 各  $\mathcal{L} \in \Sigma$  に対し,  $F_{\mathcal{L}} = \bigcap_{I \in \mathcal{L} - \{N\}} \mathcal{D}_I$  (特に  $\mathcal{L} = \{N\}$

のときは,  $F_{\mathcal{L}} = \hat{\mathbb{P}}^N$ ) と定め,  $F_{\mathcal{L}}^{\circ}$  を

$$F_{\mathcal{L}}^{\circ} = F_{\mathcal{L}} - \bigcup_{\substack{\mathcal{L}' \in \Sigma \\ \mathcal{L} \neq \mathcal{L}'}} F_{\mathcal{L}'}$$

と定める。

命題 (2, 4) (i) 各  $I \in \Sigma$  に対し  $F_L^\circ$  は codimension  $\#L-1$  の  $\hat{\mathbb{P}}^N$  locally closed subscheme.

$$(ii) \quad \hat{\mathbb{P}}^N = \bigcup_{L \in \Sigma} F_L^\circ \quad (\text{disjoint}).$$

例  $N=2$ ,  $F_{\{I, \infty\}}^\circ \cong \mathbb{P}^2 - \{ \text{triangle} \}$ ,  $F_{\{I, \infty\}}^\circ \cong \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  ( $\forall I \in \pi - I \neq \infty$ ),  $F_{\{I, J, \infty\}}^\circ \cong \{ \text{line} \}$ ,  $I \neq J$ .

注意  $\hat{\mathbb{P}}^N = \bigcup_{\substack{I \in \Sigma \\ I \neq \infty}} D_I$  は次の scheme と自然に同型である。

$$U_N = \text{PGL}(1) \backslash F_{0, N+3} \mathbb{P}^1.$$

ここで  $F_{0, N+3} \mathbb{P}^1$  は  $(\mathbb{P}^1)^{N+3}$  の open subscheme

$$\{(z_1, \dots, z_{N+3}) \in (\mathbb{P}^1)^{N+3} \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\},$$

で  $\text{PGL}(1)$  は  $F_{0, N+3} \mathbb{P}^1$  に diagonally に作用する。

$N+3$  次対称群  $S_{N+3}$  は  $U_N$  に自然に作用し  $N \geq 2$  ならばその作用

は effective で ( $N=1$  のとき  $S_4/V_4 \cong S_3$  として分解する...),

この作用は  $\hat{\mathbb{P}}^N$  に双正則に延長でき, 上の divisor configuration

は完全に  $S_{N+3}$ -対称である。この対称性をもっと見易くするに

は  $D_I$  の index  $I$  を次のように変えればよい。  $N_\infty = N \cup \{\infty\}$  と

する。  $\#I < \frac{N+3}{2}$  のとき  $\tilde{I} = I$ ,  $\#I > \frac{N+3}{2}$  のとき,  $\tilde{I} = N_\infty - I$

と置く。  $\#I = \frac{N+3}{2}$  のとき,  $\tilde{I}$  は  $I$  と  $N_\infty - I$  の組みを表わすと

する。こうして  $d_I$  も  $d_{\tilde{I}}$  と書き直せば,  $d_{\tilde{I}}$  は  $S_{N+3}$  に対して対称になっているのは明らかとなる。

$\#I \leq \frac{N+3}{2}$  は  $(\mathbb{P}^1)^{N+3}$  の  $O(2)$  に属する stability の条件で, 実は  $\hat{\mathbb{P}}^N$  から  $\mathrm{PGL}(1) \backslash (\mathbb{P}^1)^{N+3}_{\mathrm{sst}}$  に自然な写像がある。

### §3. Kummer 被覆とその分岐.

$k = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{-1})$  とおく。

定義.  $Y_n$  を  $\hat{\mathbb{P}}^N/\mathbb{Z}$  の  $K_N/K_1$  に関する normal closure とする。

命題 (3.1)  $Y_n$  は  $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{-1}, \frac{1}{n}]$  の smooth proper scheme である。

$A = \mathrm{Gal}(Y_n/\hat{\mathbb{P}}^N)$  とおく。Finite flat morphism  $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の分岐を記述するため,  $A$  を次のように書く。

$\pi$  の部分集合  $\pi_2$  を  $\pi_2 = \{I \in \pi \mid \#I = 2\}$  で定める。

$\Delta: \mu_n \rightarrow \mu_n^{\oplus \pi_2}$  を対角写像とし,  $A \cong \mu_n^{\oplus \pi_2}/\mu_n$  という同型

を以下のように定める。  $(X_i)_{i \in N} \in \mathbb{P}_N$  の homogeneous coordinates with displacement とし,  $X(i, j) = X_i - X_j$  とする。  $\sigma \in A$  に対し

$$\sigma\left(n\sqrt{\frac{X(i, j)}{X(k, l)}}\right) = \frac{\zeta_{ij}}{\zeta_{kl}} n\sqrt{\frac{X(i, j)}{X(k, l)}} \quad (\zeta_{ij}, \zeta_{kl} \in \mu_n)$$

で  $\mu_n^{\oplus \pi_2}$  の元  $(\zeta_{ij})_{i, j \in \pi_2}$  が定まる。  $(\zeta_{ij})_{i, j \in \pi_2}$  は mod  $\mu_n$  で定まる。よって  $A \cong \mu_n^{\oplus \pi_2}/\mu_n$ .  $\#\pi_2 = \binom{N+2}{2}$ .  
よって  $A \cong \mu_n^{\frac{1}{2}N(N+3)}$ .

Terada model は各点の local coordinates も自然な形で explicit に構成できる。これより,  $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の分岐群は

以下のように記述される。

各  $I \in \mathcal{R}_2$  に対して,  $\tilde{\varphi}_I: \mu_n \rightarrow \mu_n^{\oplus n_2}$  と  $\zeta \in \mu_n$  に対し  $\tilde{\varphi}_I(\zeta)$  は  $I$ -成分  $\zeta$  と他の  $J \in \mathcal{R}_2$  ( $J \neq I$ ) に対して,  $J$ -成分は 1 とおきように定義する。  $\varphi_I: \mu_n \rightarrow \mu_n^{\oplus n_2}/\mu_n = A$  と  $\tilde{\varphi}_I$  と標準全射  $\mu_n^{\oplus n_2} \twoheadrightarrow A$  の合成で定義する。  $\varphi_I$  の像を  $A_I$  と書く。  $A_I \cong \mu_n$ 。

命題 (3.1). 各  $I \in \mathcal{R}_2$  に対して,  $A_I$  は  $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の  $D_I$  に沿った分岐群である。

注意.  $D_I$  に沿った橋性群  $A_I$  の位数は  $n$  で,  $D_I \cong \hat{\mathbb{P}}^I \times \hat{\mathbb{P}}^{(N+1-I)}$  より,  $D_I$  での分解群を  $\tilde{A}_I$  とすると, 相対位数  $f = \#(\tilde{A}_I/A_I) = n^{\binom{\#I}{2}-1} + \binom{N+1-\#I}{2}-1$ .  $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の位数は  $n^{\binom{N+2}{2}-1}$ . よって  $f^{-1}(D_I)$  の既約成分の個数は  $g = n^{\binom{N+2}{2}-\binom{\#I}{2}-\binom{N+1-\#I}{2}}$ .

$\Sigma$  を  $\hat{\mathbb{P}}^N$  の stratification の定義に現われた (AR) 条件をみたす集合  $\mathcal{L}$  の集合とする。  $D_I$  ( $I \in \mathcal{R}_2^*$ ) たちは, normal crossing で, 各  $D_I$  は  $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  で branch (2) ので,  $\neq$  である。

定義.  $A_{\mathcal{L}} = \langle A_I \mid I \in \mathcal{L} - \{N\} \rangle$  とおく。  $A_{\{N\}} = \{1\}$ 。

命題 (3.2).  $A_{\mathcal{L}}$  は  $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の  $F_{\mathcal{L}}$  の generic point, あるいは  $F_{\mathcal{L}}^0$  での分岐群である。

注意.  $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の ramification locus  $R = f^{-1}(\hat{\mathbb{P}})_{\text{red}}$  はやはり normal crossing divisor in  $Y_n$  である。

§4. Euler 数

以下では  $Y_n$  の cohomology theory として 2 つのもの を 考 え る

(A) 係数体  $K = \mathbb{C}$  として,  $k \subset \mathbb{C}$  によって  $Y_n$  を  $\mathbb{C}$  上で 考 え,  $Y_n(\mathbb{C})^{\text{an}}$  で  $Y_n(\mathbb{C})$  に associate する 複素解析多様体 と 考 え る とき, 特異 cohomology 群  $H^i(Y_n(\mathbb{C})^{\text{an}}, K)$  を 考 え る.

(B) 係数体  $K = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$  として,  $Y_n \otimes_k \overline{k}$  の étale cohomology 群  $H_{\text{ét}}^i(Y_n \otimes_k \overline{k}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  を 考 え る.

いずれの場合も単に  $H^i(Y_n, K)$  と cohomology 群 を 記 す.  $K^*$  に 値 を も つ  $A$  の 指標群  $A^* = \text{Hom}(A, K^*)$  を 考 え る.  $\alpha \in A^*$  と 考 え る.

定義.  $H^i(\alpha) := \{ \gamma \in H^i(Y_n, K) \mid g^*(\gamma) = \alpha(g)\gamma; \forall g \in A \}$

但し  $g^*$  は  $g \in A \subset \text{Aut}(Y_n)$  が  $H^i(Y_n, K)$  に 引 き 起 こ す 写 像.

定義.  $e(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\alpha)$ . ここで和は  $i \leq 2N$ .

定理 (4.1)  $e(\alpha) = \sum_{\mathcal{L} \in \Sigma} e(F_{\mathcal{L}}^0) \delta(\alpha|A_{\mathcal{L}})$ .

但し  $\mathcal{L} \in \Sigma$  は stratification  $\Sigma$  の各 stratum  $\mathcal{L}$  を 動 く.  $F_{\mathcal{L}}^0$  は §2 で 定 義 し た.  $e(F_{\mathcal{L}}^0)$  は その Euler 数. 最後 に  $\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}})$  は 次 で 与 え る.

$$\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}}) = \begin{cases} 1, & (\alpha|_{A_{\mathcal{L}}} \text{ が 自明な指標}) ; \\ 0, & (\alpha|_{A_{\mathcal{L}}} \text{ が } A_{\mathcal{L}} \text{ の 自明でない指標}). \end{cases}$$

さて  $\alpha \in A^*$  について

定義 任意の  $I \in \Sigma$  に対し  $S(\alpha|A_I) = 0$  である  $\alpha$  を  $\alpha$  generic とする。明らかなに  $\alpha$  generic  $\Leftrightarrow S(\alpha|A_I) = 0, \forall I \in \Sigma$ .

系  $\alpha \in A^*$  が generic ならば,  $e(\alpha) = e(F_{Y/N}^0) = (-1)^N N!$

(定理の証明) Open immersion  $i: U_N \hookrightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  と finite morphism  $f: Y_N \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$  の fibre  $V$  とし,  $i, f$  の Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U_N \\ k \downarrow & & \downarrow i \\ Y_N & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{P}}^N \end{array}$$

を考える。ここから,  $k$  は open immersion,  $g$  は finite étale である。

$k_* \overline{\mathcal{O}}_V = \overline{\mathcal{O}}_U$  かつ  $Y_N$  上では成り立つから,  $f_* k_* \overline{\mathcal{O}}_V = f_* \overline{\mathcal{O}}_U = i_* g_* \overline{\mathcal{O}}_V$

さて  $g$  は étale であるから,  $g_* \overline{\mathcal{O}}_V$  は smooth で,  $A$ -linearized

$$g_* \overline{\mathcal{O}}_V = \bigoplus_{\alpha \in A^*} L_\alpha$$

と  $\alpha$ -eigen parts  $L_\alpha$  に分解される。各  $L_\alpha$  は rank 1 の smooth  $\overline{\mathcal{O}}_U$

sheaf on  $U_N$  である。こうして,  $f_* \overline{\mathcal{O}}_V = \bigoplus_{\alpha \in A^*} i_* L_\alpha$ 。

一方  $f_*$  は finite であるから acyclic である。  $R^i f_* \overline{\mathcal{O}}_V = 0$  ( $i > 0$ ) である

から,  $H_{\text{ét}}^i(Y_N, \overline{\mathcal{O}}_V) = H_{\text{ét}}^i(\hat{\mathbb{P}}^N, f_* \overline{\mathcal{O}}_V) = \bigoplus_{\alpha \in A^*} H_{\text{ét}}^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$ 。

$A$ -module として構造比較より,  $H^i(\alpha) = H_{\text{ét}}^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$  である

各  $\alpha$  に対して成り立つ。  $e(\alpha) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$ 。

さて  $L_\alpha$  は  $U_N$  上 smooth であるから,  $\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(U_N, L_\alpha) = e(U_N)$ 。

これより,  $e(U_N) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^i i_* L_\alpha)$ . 但し

$R^j i_* L_\alpha$  は  $L_\alpha$  の derived complex.  $j \geq 0$

$$e(U_N) = e(\alpha) + \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha).$$

- Euler-Poincaré 標数の加法性より,

$$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha).$$

よって

$$e(U_N) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha).$$

ここで  $R^j i_* L_\alpha$  は各  $F_\ell^0$  上 smooth sheaf になることを使うと,

$$e(U_N) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \cdot \text{rank} \{ (R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell} \} e(F_\ell^0).$$

ここで,  $(R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell}$  は  $F_\ell^0$  のある点  $x_\ell$  での  $R^j i_* L_\alpha$  の stalk である. この補題は易しい.

補題  $\sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \text{rank} \{ (R^j i_* L_\alpha)_x \} = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in U_N; \\ 0, & \text{if } x \notin U_N. \end{cases}$

これより,  $R^j i_* L_\alpha$  について E-P 標数の加法性を使い,

$$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

$$\text{よって } e(U_N) - e(\alpha) = \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^i \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \cdot \text{rank} \{ (R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell} \} e(F_\ell^0)$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \left[ \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \operatorname{rank} \{ (R^j i_+ L_\alpha)_{x_\ell} \} e(F_\ell^0) - \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell} e(F_\ell^0) \right]$$

$$= (-1) \sum_{\substack{\ell \in \Sigma \\ \ell \neq \{N\}}} \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell} e(F_\ell^0) + e(U_N) - \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_N} e(U_N).$$

ここで、 $(i_+ L_\alpha)_{x_N}$  の  $\operatorname{rank}$  は 1 であることに注意して、

$$e(U_N) = e(\alpha) + (-1) \cdot \sum_{\substack{\ell \in \Sigma \\ \ell \neq \{N\}}} e(F_\ell^0) \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell}.$$

つまり、
$$e(\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} e(F_\ell^0) \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell}.$$

ここで、 $L_\alpha$  に対応する  $U_N$  の基本群の表現を考えると、それは  $H_1(U_N, \mathbb{Z})$  或  $H_1^{\text{ét}}(U_N, \hat{\mathbb{Z}})$  を通って分解し、標準全射  $H_1(U_N, \mathbb{Z}) \rightarrow A$  或は  $H_1^{\text{ét}}(U_N, \hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow A$  によつて、 $A$  を通って分解し、指標  $\alpha: A \rightarrow K^*$  に対応している。よつて  $(i_+ L_\alpha)_{x_\ell}$  は  $x_\ell$  の inertia group  $A_\ell$  により定まり、表現  $\alpha$  による、 $A_\ell$  の fixed part になる。  $\operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell} = \dim K^{\alpha(A_\ell)} = \delta(\alpha|A_\ell)$ .

(証明終り)

## § 5. generic symmetric characters and abelian $\ell$ -adic representations

$N$  を  $\pi$  の元とみる。すると  $U_N = F_N^0$  は  $A^N$  の open subscheme とみなせる。 $A^N$  の座標の置換によつて  $N$  変対称群  $S_N$  は  $A^N$  に作用し  $U_N$  はこの  $S_N$  の作用で安定である。しかも  $S_N$  は  $S_{N+3} = \operatorname{Aut}(U_N)$  の部分群とみなせる。 $S_N$  は  $U_N$  の  $H_1(U_N, \mathbb{Z})$ 、あるいは  $H_1^{\text{ét}}(U_N \otimes \bar{k}, \hat{\mathbb{Z}})$



に自然に作用し,  $A$  は  $H_1(U_N, \mathbb{Z})/nH_1(U_N, \mathbb{Z})$  あるいは  $H_1^{\text{ét}}(U_N \otimes \bar{k}, \mathbb{Z})/nH_1^{\text{ét}}(U_N \otimes \bar{k}, \mathbb{Z})$  と同一視できよから,  $A$  にも, 従って  $A^*$  にも作用する。

定義  $\alpha \in A^*$  が symmetric とは, 上の  $S_N$  の  $A^*$  の作用で  $\alpha$  が不変に保たれているときをいう。

さて  $\alpha \in A^*$  が generic であるとき  $i_* L_\alpha = i_! L_\alpha$  が成り立ち, 特に  $H^i(U_N, L_\alpha) = H_c^i(U_N, L_\alpha)$  は pure で,  $U_N$  affine であり,  $\alpha^{-1}$  も generic であることを使って,

$$H^i(U_N, L_\alpha) = H_c^i(U_N, L_\alpha) \cong \begin{cases} 105 & (i \neq N+2); \\ K^{\oplus N!} & (i = N+2). \end{cases}$$

さらに  $\alpha$  が symmetric であるとき,  $S_N$  は  $H^N(U_N, L_\alpha)$  に作用する。

命題 (5.1)  $\alpha \in A^*$  が generic symmetric であるとき,  $S_N$  が上記で述べた  $H^N(U_N, L_\alpha)$  に引き起こす表現は正則表現である。

(証明).  $S_N$  は  $U_N$  に固定点なしに作用することを確認し, Le fuchs の fixed point theorem を使う。

系. 上と同じ仮定で  $H^N(U_N, L_\alpha)$  の  $S_N$ -不変部分空間は一次元である。

$S_N$  の作用が良上定義されていることを使. ておこう。

命題 (5.2)  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  とし,  $K = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$  とする.  $H_{\text{ét}}^N(U_N \otimes_{\overline{k}} \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  の部分空間  $H^N(U_N, L_\alpha)^{S_N}$  は  $\alpha$  が generic symmetric  $\alpha$  とし  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$  上-定数で  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$  の abelian  $\ell$ -adic 表現を定める.

さて Hennart [H] は Waldschmidt の方法の  $p$ -進の類似物を考えることにより Serre の予想の証明に成功した. これにより本命題が真になる.

定理 (5.3)  $\ell$ -進表現

$$\rho_\alpha^{S_N} : \text{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \text{Aut } H^N(U_N, L_\alpha)^{S_N} \cong \overline{\mathbb{Q}_\ell}^*$$

は  $k$  の 量指標 (algebraic Hecke character) から得られる  $\alpha$  と一致する.

さて  $V_N = U_N/S_N$  とすると  $V_N$  は smooth affine scheme であり,  $L_\alpha$  は étale finite morphism  $U_N \rightarrow V_N$  に対して,  $\alpha$  が symmetric  $\alpha$  とし descent して, rank 1 の smooth  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -sheaf  $M_\alpha$  を定める.  $H_{\text{ét}}^N(U_N \otimes_{\overline{k}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}, L_\alpha)^{S_N} = H_c^N(U_N \otimes_{\overline{k}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}, L_\alpha)^{S_N} = H_c^N(V_N \otimes_{\overline{k}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}, M_\alpha)$  となる.

$p$  を素数とし,  $2n$  と互いに素な素数  $\ell$  とする. すると  $U_N, V_N, L_\alpha$  等は  $\alpha \pmod{p}$  で good reduction を持つこととなる. よって  $\rho_\alpha^{S_N}$  という  $\ell$ -進表現は  $y$  が  $p$  の上にある  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  の place  $y$  があるとき  $y$  では不分裂. よって  $y$  の Frobenius の像を

決めることと次の目標になる。

### §6. 有限体上で.

この節では  $V_N$  等を reduction modulo  $p$  して  $\mathbb{F}_q$  上で考える。

但し,  $q$  は  $p$  の中で  $p^f$  で  $\mathbb{F}_{p^f}$  及び  $\sqrt{-1}$  を含む最小の中。

Grothendieck - Deligne 公式 (cf. SGA 4  $\frac{1}{2}$  [D-1]) によつて,  $\rho_{\alpha}^{S_N}$  による Frobenius の像の特性多項式は  $V_N$  の closed points における,  $M_{\alpha}$  への Frobenius の作用をみれば, それを用いて書き表され, 特性多項式は exponential sum を係数とする多項式となる。

定理 (0.4) は  $\alpha \in A^{\pm}$  及び generic symmetric という仮定の元では Katz ([K]) の議論の類似を用いて, この closed points の Frobenius の作用と Selberg 和の各項に対応する形になる, といふことを見ることで証明される。

### §7. 未解決の点。

1-進表現  $\rho_{\alpha}^{S_N}$  に対応する Größen character の infinite type は手配されていゝ。weight は  $N$  であることは, 構成より明らかであるが, infinite type と  $H^2(V_N, \mathbb{C})$  の Hodge structure が一致する,  $H^2(V_N(\mathbb{C})^{\text{an}}, L_{\alpha})^{S_N}$  の Hodge type と一致して,  $\pm 1$  である Hodge type であることは, 2-進の  $\rho_{\alpha}$  によつて explicit に表わされることが不明である。

## References

- [W-1] A.Weil:Jacobi sums as "Grösse en caractere". Trans.Am.Math.Soc.,73 p.487-495(1952) (=全集、巻II、1952d)
- [W-2] A.Weil:Sommes de Jacobi et caractères de Hecke.  
(全集、巻III、1974d、p.329-342)
- [D-1] Deligne,P.:Applications de la formule des traces aux sommes trigonometriques. SGA (du Bois-Marie) 4+1/2; Lecture Notes in Math.569, p.168-232, Springer, 1977.
- [S-1] A.Selberg:Bemerkninger om et multipelt integral.  
Norske Mat.Tidsskr 26,p.71-78 (1944)
- [E-1] R.Evans:Identities for products of Gauss sums over finite fields.  
Enseign.Math.,27(1981),197-209.
- [E-2] R.Evans and W.Root.:Conjectures for Selberg character sums.  
J.Ramanujan Math.Soc.3(1),p.111-128 (1988).
- [O-1] Y.Oda:同じ題 I.  
Contemporary Math 83, p.159-181 (1989)
- [A-1] K.Aomoto:  
Journal of the Math.Soc.Japan 1984
- [T-K] A.Tsuchiya and Y.Kanie:Fock space representation of the Virasoro algebra = Intertwining operators.  
Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22,p.259-327 (1986)
- [T] T.Terada:Fonctions hypergéométriques  $F_1$  et fonctions automorphes I.  
Journal of the Math.Soc.Japan, p.451-476 (1983).
- [H] G.Henniart:Représentations  $\mathbb{A}$ -adiques abéliennes,  
in "Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1980-81,"  
Birkhäuser Progress in Math., vol.22, 1982, pp.107-126.
- [K] N.Katz:Crystalline cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums.  
Automorphic forms, representation theory, and arithmetic. p.165-246  
(Bombay Colloquium, 1979),Springer, 1981.